

1993年

東大数学

文系第1問

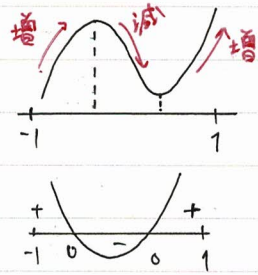
$y=f(x)$ が $-1 \leq x \leq 1$ で

極大値と極小値をとり

⇕

$f(x)=0$ が $-1 \leq x \leq 1$ で

異なる2実数解をもつ。



仮定で

$f(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$ について

$-1 \leq x \leq 1$ に異なる2解をもつ条件を考へる

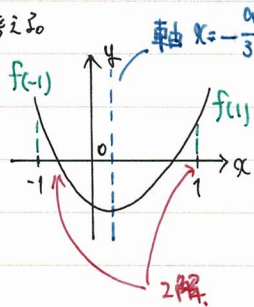
① $D > 0$ (判別式)

② $-1 < -\frac{a}{3} < 1$ (軸)

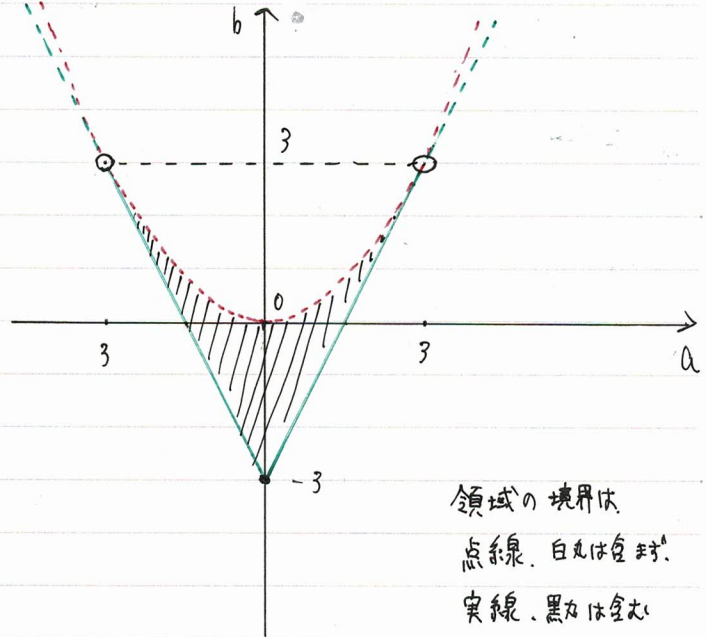
③ $f(-1) \geq 0$ (左端点)

④ $f(1) \geq 0$ (右端点)

の4条件が成り立つこと。



①' ②' ③' ④' を全て満たす領域を図示する。



領域の境界は
点系集. 白丸は直線.
実線. 黒丸は楕円

① について

$D/4 = (-a)^2 - 3b > 0 \iff b < \frac{1}{3}a^2 \dots ①'$

② について

$-1 < -\frac{1}{3}a < 1 \iff -3 < a < 3 \dots ②'$

③ について

$f(-1) = 3 - 2a + b \geq 0 \iff b \geq 2a - 3 \dots ③'$

④ について

$f(1) = 3 + 2a + b \geq 0 \iff b \geq -2a - 3 \dots ④'$

$b = \frac{1}{3}a^2$ と $b = 2a - 3$ を連立すると
 $\frac{1}{3}a^2 = 2a - 3 \iff (a-3)^2 = 0 \iff a = 3$ で接する

$b = \frac{1}{3}a^2$ と $b = -2a - 3$ を連立すると
 $\frac{1}{3}a^2 = -2a - 3 \iff (a+3)^2 = 0 \iff a = -3$ で接する

登場する直線と曲線の位置関係
(交わる, 接する)